数理解析研究所講究録
59巻 1968年 8-22

非対称楕円型作用素に関する Neumann 型理想境界

東大 理 伊藤清三

§0. 序

二階楕円型作用素 $A = div\,\nabla + \mathbb{b}\cdot\nabla$ に関する Martin 境界の理論は，Dirichlet 問題の一般化と考えられるから，A の形式的共役作用素 A^*: $A^*u = div(\nabla u - \mathbb{b}u)$，に関する Neumann 問題に対応する理想境界の構成を試みる．このような理論は，普通の Riemann 面上のラプラシアンの場合に，Kuramochi [1] によって創始され，その主要部は Ohtsuka [2] により簡易化されたが，上記 A^* で $\mathbb{b} \equiv 0$ の場合には，微分方程式に関する結果の援用により，[2] とほとんど平行に議論できる [5]．本稿では，$\mathbb{b} \equiv 0$ とは仮定せず，$\mathbb{b}$ に対する適当な付帯条件（§1，条件 A）のもとで，同様な理想境界の理論を構成する．本稿の方法は偏微分方程式論の枠内での解析的方法であるが，確率論的方法でも同様な理論が試みられつつある．（Riemann 面の場合の関連文献については [2] の末尾を，確率論的方法については [3] およびその引用文献を参照．）

§1. 予備概念

Riemann 空間 R における前述の楕円型作用素 A^* を考える，ここで div は Riemann 計量のテンソル a^{ij} に関するものとし，$\mathbf{b}$ は反変ベクトルとする．また $(\nabla u \cdot \nabla v) = a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x^j}$，$|\nabla u| = (\nabla u\cdot\nabla u)^{1/2}$ とし，R の任意の部分領域 Ω と，Ω 上で $\omega(x) \geqq 0$ なる任意の函数 ω に対して次のように定義する：

$$(\nabla u, \nabla v)_{\Omega,\omega} = \int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla v)\, d_\omega x, \quad \|\nabla u\|_{\Omega,\omega} = (\nabla u, \nabla u)_{\Omega,\omega}^{1/2},$$

ここに $d_\omega x = \omega(x)\sqrt{a(x)}\,dx^1\cdots dx^m$ $\left(a = \det\|a_{ij}\|,\ m = \dim R\right)$.

測度 $d_\omega x$ に関する m ベクトル函数の L^2 空間を $\mathbb{L}^2_\omega(\Omega)$ と書く。

集合 $E \subset R$ の境界が，互いに交わらない有限個の滑らかな曲面からなるとき，E は<u>正則</u>であるということにする．

正則なコンパクト領域 K_0 を一つ固定する．

任意の領域 $\Omega \supset K_0$ に対して，$\Omega - K_0$ で滑らかで $\psi|_{\partial K_0} = 0$ かつ $\nabla\psi \in \mathbb{L}^2_\omega(\Omega - K_0)$ なる函数 ψ の全体を $P_\omega(\Omega; K_0)$ と書く。

$K_0 \subset D$ かつ $\bar{D}$ がコンパクトな領域 D に対して，境界値問題

(1.1) $\quad A^* u = 0,\quad u|_{\partial K_0} = \varphi_0,\quad u|_{\partial D} = \varphi$

のグリーン函数を $G^D(x, y)$ とし，境界値問題

(1.2) $\quad A^* u = 0,\quad u|_{\partial K_0} = \varphi_0,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \beta u\right)\Big|_{\partial D} = \varphi$

の核函数を $N^D(x, y)$ とする（いずれも y の函数として）．また ∂K_0 上の連続函数 φ_0 を任意に固定したとき，境界値問題

(1.3)　$A^*u=0$, $u|_{\partial K_0}=\varphi_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\beta u\right)\Big|_{\partial D}=0$

の解を u^D と書くことにする。β は境界上での $\mathbb{b}$ の外向き法線成分を表わす。このとき

<u>補題 1.1.</u> $\{G^D(x,y)\}$ は D について単調増加で，$G(x,y)=\lim_{D\uparrow R} G^D(x,y)$ は，y を固定すれば x について $R-K_0-\{y\}$ で $AG=0$ を満たし，x を固定すれば y について $R-K_0-\{x\}$ で $A^*G=0$ を満たす。

<u>補題 1.2.</u> $\{N^D(x,y)\}$ は $\overline{(R-K_0)}\times\overline{(R-K_0)}$ $(x\neq y)$ の任意のコンパクト部分領域で一様有界かつ同等連続である。

<u>補題 1.3.</u> $\{u^D\}$ は $\overline{R-K_0}$ の任意のコンパクト部分領域で一様有界かつ同等連続である。

さて，(1.3) において $\varphi_0\equiv 1$ としたときの u^D を ω^D と書くと，$\overline{D-K_0}$ において $\omega^D>0$ となる。$p^D=\log\omega^D$ とおくと，

(1.4)　$(\mathbb{b}-\nabla p^D,\ \nabla\psi)_{D-K_0,\,\omega^D}=0$ $\ (\forall\psi\in P_{\omega^D}(D;K_0))$.

以下本稿全体で次のことを仮定する；

<u>条件A.</u> 次の (A.1), (A.2) が成立するような函数 $g(x)$ が存在する：

(A.1)　$\int_R |\mathbb{b}-\nabla g|\,d_w x<\infty$,　$w=e^g$,

(A.2)　$\varliminf_{D\uparrow R}\ \sup_{D-K_0}|p^D-g|<\infty$.

上の (A.2) は，次の (A.2′) が成立するような領域列 $\{D_n\}$ と定数 M とが存在することと同等である：

(A. 2′)　$K_0 \subset D_n \uparrow R$，$\sup_{D_n - K_0} |p^{D_n} - g| \leqq M < \infty$.

$\mathbb{b} = \nabla p$ と表わされるならば，任意の $D \supset K_0$ に対して $\omega^D(x) = e^{p(x)}$ となり，$g = p$ として条件 A が成立する．一方この条件の成立しない例もある．しかし次のことが証明できる：

<u>補題 1.4.</u> 条件 A の成否は K_0 のとり方には関係しない．

よって<u>今後 K_0 を固定し</u>，$K_0 \subset \Omega \subset R$ なる任意の領域 Ω に対して $\Omega' = \Omega - K_0$ とする．このとき補題 1.3 により $\{\omega^{D_n}\}$（$\{D_n\}$ は (A. 2′) のもの）の適当な部分列は $R' + \partial K_0$ で広義一様収束する．$\{D_n\}$ をその部分列に対するものでおきかえても (A. 2′) は成立するから，最初から $\{\omega^{D_n}\}$ が $R' + \partial K_0$ で広義一様収束するとしてよい．よって $\lim \omega^{D_n} = \omega$，$p = \log \omega$ とおくとき，$\lim p^{D_n} = p$（広義一様収束）である．このとき (A. 1)，(A. 2′) および (1. 4) から

(1. 5)　$\mathbb{b} - \nabla p \in \mathbb{L}^2_\omega(R')$，

(1. 6)　$(\mathbb{b} - \nabla p, \nabla \psi)_{R', \omega} = 0$　$(\forall \psi \in P_\omega(R; K_0))$

が示され，また一般に次のことが証明される：

<u>補題 1.5.</u> (1. 5)，(1. 6) を満たすような函数 $\{p, \omega\}$ $(p = \log \omega)$ は一意的である．

だから，今後の議論は (A. 1)，(A. 2′) を満たす函数 $g(x)$，領域列 $\{D_n\}$ のとり方には関係しない．

よって以後この $\{p, \omega\}$ を固定して話を進める．

§2. Dirichlet 原理の類似

任意の領域 $\Omega \supset K_0$ と，任意の正則なコンパクト集合 $K \subset \Omega'$ および任意の $\varphi \in C(\partial K)$ に対して，$\overline{\Omega' - K}$ で連続かつその内部で滑らかで，$\psi|_{\partial K_0} = 0$，$\psi|_{\partial K} = \varphi$，$\|\nabla\psi\|_{\Omega'-K,\omega} < \infty$ なる ψ の全体を $\mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega)$ と書くことにする．このとき，

補題 2. 1. $\Phi \in \mathbb{L}_{\omega}^2(\Omega' - K)$，$\psi \in \mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega)$ に対して次の i)，ii) は同等であり，Φ を与えるとこのような ψ は高々一つ定まる：

i) $\|\Phi - \nabla\psi\|_{\Omega'-K,\omega} \leqq \|\Phi - \nabla\psi'\|_{\Omega'-K,\omega}$ $(\forall\psi' \in \mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega))$，

ii) $(\Phi - \nabla\psi, \nabla w)_{\Omega'-K,\omega} = 0$ $(\forall w \in \mathcal{D}_K^{0}(\Omega))$.

$\Phi \in \mathbb{L}_{\omega}^2(\Omega' - K)$ に対してこのような ψ が存在するときに，$P_{\Omega}^{\varphi}(\Phi) = \nabla\psi$ によって写像 P_{Ω}^{φ} を定義する．$\psi \in \mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega)$ ならば $P_{\Omega}^{\varphi}(\nabla\psi) = \nabla\psi$ である。$\varphi \neq 0$ ならば P_{Ω}^{φ} は線型写像ではない．

Ω としてコンパクトな閉包をもつ正則な領域 D をとり，$\varphi \in C^1(\partial K)$ とすると，$\mathcal{D}_K^{\varphi}(D)$ の中で $\|\nabla\psi\|_{D'-K,\omega}$ を最小にする ψ が必ずただ一つ存在し，それは境界値問題

(2. 1) $\Delta_{\omega}\psi = 0$，$\psi|_{\partial K_0} = 0$，$\psi|_{\partial K} = \varphi$，$\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial D} = 0$

(但し $\Delta_{\omega}\psi = \frac{1}{\omega} div(\omega\nabla\psi)$) の解である．それを ψ_D^{φ} と書くと，$\psi^{\varphi} = \lim_{D \uparrow R} \psi_D^{\varphi}$ ($\overline{R' - K}$ で広義一様) が存在し，ψ^{φ} は $\mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega)$ の中で $\|\nabla\psi\|_{R'-K,\omega}$ を最小にするただ一つの函数である．境界値問題

(2. 2) $A^* u = 0$，$u|_{\partial K_0} = 0$，$u|_{\partial K} = \varphi$，$\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \beta u\right)\Big|_{\partial D} = 0$

の解の存在と一意性から，

補題 2.2. $P_D^{\varphi}[\nabla\frac{u^D}{\omega^D}-(b-\nabla p)\frac{u^D}{\omega^D}]=\nabla\psi_D^{\varphi}$, $u^D|_{\partial K_0}=0$, $u^D|_{\partial K}=\varphi$ なる u^D が, $\varphi\in C^1(\partial K)$ に対してただ一つ存在する.

$\{D_n\}$ を §1 に述べた領域の列とすると, 補題 1.3 (但し K_0 を K_0+K でおきかえる) により, $\{u^{D_n}\}$ の部分列が $\overline{R-K_0-K}$ で広義一様収束し, 極限函数 u は次の定理の性質をもつ.

定理 2.1. $\varphi\in C^1(\partial K)$ ならば

$$P_R^{\varphi}[\nabla\frac{u}{\omega}-(b-\nabla p)\frac{u}{\omega}]=\nabla\psi^{\varphi},\ \|\nabla\frac{u}{\omega}\|_{R'-K,\omega}<\infty,\ \sup_{R'-K}\left|\frac{u}{\omega}\right|<\infty$$

なる u が存在してただ一つである. さらにその u は, $R'-K$ において $A^*u=0$, $\sup_{R'-K}\left|\frac{u}{\omega}\right|\leqq\max_{\partial K}\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ を満たし, 任意の $\psi\in P_\omega(R;K+K_0)$ に対して $(\nabla\frac{u}{\omega}-[b-\nabla p]\frac{u}{\omega},\nabla\psi)_{R'-K,\omega}=0$ となる.

この u を φ_K と書くことにすると, 任意の $y\in R'-K+\partial K$ に対して, 写像 $\frac{\varphi}{\omega}\longrightarrow\frac{\varphi_K(y)}{\omega(y)}$ は $C(\partial K)$ 上の正値有界線型汎函数に拡張されるから, ∂K 上の測度 μ_K^y で, $\mu_K^y(\partial K)\leqq 1$ であり

(2.3) $\qquad \varphi_K(y)=\omega(y)\int_{\partial K}\frac{\varphi(x)}{\omega(x)}d\mu_K^y(x)$

となるものが存在する. この式により, $\varphi_K(y)$ が ∂K の上の μ_K^y-可積分函数 φ にまで拡張される. このとき,

定理 2.2. φ が ∂K で下半連続ならば, $R'-K$ の各連結成分において, $\varphi_K\equiv\infty$ でないかぎり, $A^*\varphi_K=0$ が成立する.

今後 R' 上の下半連続函数 u と任意の正則なコンパクト集合 K に対して, $\varphi=u|_{\partial K}$ として, u_K を次のように定義しておく:

(2.4) $\quad u_K(x)=u(x)\ (x\in K),\ =\varphi_K(x)\ (x\in R'-K+\partial K_0)$.

§3. 核函数 $N(x, y)$ の構成

函数 $G(x, y)$ (§1) の x を固定し，y の函数として (2.4) で定義した $G(x, \cdot)_K$ を $G_K(x, y)$ と書くことにすると，

(3.1) $R' \supset K_1 \supset K_2 \ni x$ ならば $G_{K_1}(x, y) \leqq G_{K_2}(x, y)$,

(3.2) $x \in D'_n$ ならば $\sup_{x \in K \subset D'_n} \int_{D'_n} G_K(x, y) dy < \infty$

なることが示されるので，$y \neq x$ なるかぎり

(3.3) $N(x, y) = \sup_{K \ni x} G_K(x, y) = \lim_{K \downarrow x} G_K(x, y)$

が定義されて，これは y について $R' - \{x\}$ で $A^* N = 0$ となる。

一方補題 1.3 により $\{N^{D_n}(x, y)\}$ の適当な部分列は，ある函数 $N^R(x, y)$ に $\overline{R'} \times \overline{R'}$ $(x \neq y)$ で広義一様に収束するが，このとき $N^R(x, y) = N(x, y)$ なることが示されるので，

(3.4) $N(x, y) = \lim_{n \to \infty} N^{D_n}(x, y)$ (部分列をとらずに)

となる。$N(x, y)$ の一意性は (3.3) の構成法から得られ，その解析的性質は (3.4) からが得やすい．例えば，y を固定すれば，x について $R' - \{y\}$ で $AN = 0$ を満たす．また

補題 3.1. $f \in C_0^2(R')$ ならば $\int_{R'} N(x, y) \cdot Af(y) dy = -f(x)$.

R' 上の測度 μ のポテンシャル μN を $\mu N(y) = \int_{R'} N(x, y) d\mu(x)$ で定義すると，上の補題を使って以下のことが示される：

補題 3.2. $\mu N \not\equiv \infty$ ならば，μN は優調和函数である．

補題 3.3. v が R' の部分領域 Ω で優調和ならば，Ω 上の測度 μ と調和函数 h とが存在して $v = \mu N + h$ (Riesz 分解).

§4. 理想境界の構成

R の一点コンパクト化の位相を与える一つの距離を ρ_0 とする。$x \in K_0$, $y \in R'$ ならば $N(x, y) = 0$ と定義しておき，

$$\rho_1(x, x') = \int_{D_1'} \frac{|N(x, y) - N(x', y)|}{1 + |N(x, y) - N(x', y)|}\, dy \quad (x, x' \in R)$$

と定義して $\rho(x, x') = \rho_0(x, x') + \rho_1(x, x')$ とおくと，ρ は R における距離になり，R の本来の位相と同じ位相を与える。また，R は ρ について全有界なことが示される．R の ρ に関する完備化を $\hat{R}$ とし，$\hat{S} = \hat{R} - R$ とおくと，

定理 4.1. $\hat{R}$ は ρ についてコンパクトで，$\hat{S}$ はその中で内点をもたない閉集合，R は $\hat{R}$ の中へ同相に埋蔵されている．

定理 4.2. $N(x, y)$ は $\hat{R} \times (R' + \partial K_0) - \{(z, z);\, z \in R' + \partial K_0\}$ の上の連続函数に一意的に拡張され，$x \in \hat{R}$ を固定するとき，$N(x, y)$ は y について $R' - \{x\}$ で $A^* N = 0$ を満たす。$\xi, \eta \in \hat{S}$ であって $N(\xi, y) = N(\eta, y)$ $(\forall y \in R')$ ならば $\xi = \eta$ である．

定理 4.3. $\hat{R}$ は K_0, ρ_0, D_1 に無関係(一様同相)である．

定義. $\hat{S}$ を A^* に関する R の N型理想境界と呼ぶ．

前に定義したポテンシャル μN を，μ が $R' + \hat{S}$ の上の測度の場合に拡張できる(定理 4.2 により)．このとき

定理 4.4. 任意の正則なコンパクト領域 $K \subset R'$ に対して $(\mu N)_K \leqq \mu N$ となる; μ の台 $\subset K^\circ$ ならば等号が成立する．

§5. FH函数とFSH函数

下記の定義では，v は R' において下半連続，$\geqq 0$，$\not\equiv \infty$ とする．v に対して v_K を §2 の最後に述べたとおりとする．

定義．i）任意の正則なコンパクト領域 $K \subset R'$ に対して R' で $v_K \leqq v$ となるとき，v をFSH函数または full superharmonic function（全優調和函数）という；さらに v が R' で調和のときFH函数または full harmonic function（全調和函数）という．

ii）v がFSH函数であって，$K_m \downarrow K_0$ なる正則なコンパクト集合の任意の列 $\{K_m\}$ に対して R' 上で $\lim_{m\to\infty} v_{\partial K_m}(x) = 0$ となるとき，v を FSH_0 函数という；さらに v が R' で調和のとき FH_0 函数という．

注意．FH_0 函数 v は $v|_{\partial K_0} = 0$ なることが示されるが，FSH_0 函数 v では $v|_{\partial K_0} = 0$ とならない例がある．

補題 5.1．FSH函数は優調和である．

補題 5.2．$R' + \hat{S}$ 上の任意の測度 μ に対して，μN は FSH_0 函数である．

定理 5.1．任意のFSH函数 v と任意の正則なコンパクト集合 $K \subset R'$ に対して，台が K に含まれる測度 μ が存在して，$v_K = \mu N$ と表わされる．

定理 5.2．任意のFSH函数は，FH函数と R' 上の測度 μ のポテンシャル μN との和として表わされる．

R'の中の任意の開集合Ωに対して，Ωに含まれる正則なコンパクト集合の全体を$\mathfrak{K}_\Omega$と書くことにし，任意のFSH函数vに対して$v_\Omega(x) = \sup_{K\in\mathfrak{K}_\Omega} v_K(x)$と定義すると，

補題5.3. $\{K_m\}\subset\mathfrak{K}_\Omega$，$K_m\subset(K_{m+1})^\circ$，$K_m\uparrow\Omega$ならば，$R'$において$v_{K_m}(x)\uparrow v_\Omega(x)\leqq v(x)$となる．従って$v_\Omega$はFSH函数であり，特に$\overline{\Omega}\cap K_0=\phi$ならば$v_\Omega$は$FSH_0$函数である．また$(u+v)_\Omega = u_\Omega + v_\Omega$が成立する．

さて(2.4)におけるφ_Kが境界値問題(2.2)の解u^Dの極限として得られる（定理2.1の'一意性'）から，$K_1\subset(K_2)^\circ$ならば，任意のFSH函数vに対して$(v_{K_1})_{K_2}=v_{K_1}$となる．この事実と補題5.3により，

定理5.3. $\Omega_1\subset\Omega_2$ならば$(v_{\Omega_1})_{\Omega_2}=v_{\Omega_1}$.

今後集合$E\subset\hat{R}$の$\hat{R}$における閉包をE^aと書く（集合$E\subset R$のRにおける閉包は今までどおり$\overline{E}$と書く）.

$\hat{S}$の閉部分集合Γに対して，R'の中の正則な開集合Ωで$\Omega^a\supset\Gamma$なるものの全体を$\mathfrak{U}_\Gamma$と書くことにし，任意のFSH函数vに対して$v_\Gamma(x)=\inf_{\Omega\in\mathfrak{U}_\Gamma} v_\Omega(x)$と定義すると，

補題5.4. $\{\Omega_m\}\subset\mathfrak{U}_\Gamma$，$\Omega_m\supset\overline{\Omega_{m+1}}$，$\Omega_m^a\downarrow\Gamma$ならば，$R'$において$v_{\Omega_m}(x)\downarrow v_\Gamma(x)$となる．$v_\Gamma(x)$は$FH_0$函数であり，また$(u+v)_\Gamma = u_\Gamma + v_\Gamma$が成立する．

定理5.4. vがFH_0函数ならば$v_{\hat{S}}\equiv v$となる．

§6. FH_0 函数と FSH_0 函数の積分表示

定理 6.1. 任意の FSH_0 函数（または FH_0 函数）は，$R'+\hat{S}$ の上（または $\hat{S}$ の上）の測度 μ のポテンシャル μN で表わされる；逆も成立する．

Riesz 分解（補題 3.3）により，この定理は，v が FH_0 函数の場合を証明すればよい．その場合，D_n' で $v=v_{\partial D_n}=\mu_n N$ となる ∂D_n 上の測度 μ_n（定理 5.1）をとれば，$\sup_n \mu_n(\partial D_n)<\infty$ が示されて $\{\mu_n\}$ のある部分列が $\hat{S}$ 上の測度 μ に漠収束し，R' で $v=\mu N$ なることが示される．逆は定理 4.4 を使う．

補題 6.1. v を FSH 函数とし，Ω を $\overline{\Omega}\cap K_0=\phi$ なる開集合とすると，台が Ω^a に含まれる測度 μ が存在して，R' において $v_\Omega=\mu N$ が成立する．

補題 6.2. v が FSH 函数，μ が $R'+\hat{S}$ の上の測度，Ω が R' の中の開集合ならば，$(\mu N)_\Omega=\mu N_\Omega$ である．

これらの補題により次の定理が証明される；特に v が FH_0 函数で $\Gamma=S$ ならば，定理 5.4 により，v の積分表示を得る．

定理 6.2. v が FSH 函数，Γ が $\hat{S}$ の閉部分集合とすると，台が Γ に含まれる測度 μ が存在して $v_\Gamma(y)=\int_\Gamma N(\xi,y)\,d\mu(\xi)$，$\mu(\Gamma)=\int_{\partial K_0}\frac{\partial v_\Gamma}{\partial n}\,ds$ が成立する．

定理 6.3. v，μ を補題 6.2 のとおりとし，Γ を前定理のとおりとすると，$(\mu N)_\Gamma=\mu N_\Gamma$ が成立する．

§7. 理想境界点の分類，標準表現，極値的函数

v をFSH函数とし，$\left\|\nabla \frac{v}{\omega}\right\|_{R',\omega} < \infty$，$\sup_{R'}\left|\frac{v}{\omega}\right| < \infty$ なるものとする．このような v に対して，以下の補題7.1—7.3が順次証明される（K，Ω，Γ の意味は前§までの慣用どおり）：

補題7.1．K↑Ω のとき $\left\|\nabla \frac{v_K - v_\Omega}{\omega}\right\|_{R',\omega} \to 0$ であって，

$\left\|\nabla \frac{v_\Omega}{\omega}\right\|_{R',\omega} \leqq 2\left\|\nabla \frac{v}{\omega}\right\|_{R',\omega} + \left\|[\mathfrak{b} - \nabla p]\frac{v}{\omega}\right\|_{R',\omega}$（右辺はΩに無関係）.

補題7.2．$\Omega^a \downarrow \Gamma$ のとき $\left\|\nabla \frac{v_\Omega - v_\Gamma}{\omega}\right\|_{R',\omega} \to 0$.

補題7.3．$(v_\Gamma)_\Gamma = v_\Gamma$；特に $(\omega_\Gamma)_\Gamma = \omega_\Gamma$.

定理7.1．v をFH函数とし，Γ を $\hat{S}$ の閉部分集合で $\omega_\Gamma \equiv 0$ なるものとすると，$(v_\Gamma)_\Gamma = v_\Gamma$ となる．

これの証明には，まず $\Omega \supset \Omega_1 \supset \Omega_2$，$\Omega_2^a \supset \Gamma$，$K \subset \Omega - \bar{\Omega}_2$ なるとき，$M = \max_{\partial K} v$，$m = \min_{\partial K} \omega$ とおくと，$R' - K - \Omega_2$ で

$$(v_{\Omega_1} - v_{\Omega_2})_K \leqq v_{\Omega_1} - v_{\Omega_2} + \frac{M}{m}\omega_{\Omega_2}$$

となることを示し，$\Omega_2^a \downarrow \Gamma$ としてから K↑Ω とすると，$\omega_\Gamma \equiv 0$ によって $(v_{\Omega_1} - v_\Gamma)_\Omega \leqq v_{\Omega_1} - v_\Gamma$ となる．これに定理5.3を適用すると $(v_\Gamma)_\Omega \geqq v_\Gamma$ となるから，$\Omega^a \downarrow \Gamma$ として $(v_\Gamma)_\Gamma \geqq v_\Gamma$ を得る．一方 $(v_\Gamma)_\Gamma \leqq v_\Gamma$ だから，定理の等式を得る．

y の函数としての $N_K(\xi, y)$（$\xi \in \hat{S}$ を固定）から，§5に述べたように順次 $N_\Omega(\xi, y)$，$N_\Gamma(\xi, y)$ を定義する．$\Gamma = \{\xi\}$ の場合に定理6.2を適用すると，$\hat{S}$ の上の函数 $\alpha(\xi)$ で

$$(7.1)\quad N_{\{\xi\}}(\xi, y) = \alpha(\xi)N(\xi, y),\quad \alpha(\xi) = \int_{\partial K_0} \frac{\partial N_{\{\xi\}}(\xi, y)}{\partial n_y}\, ds_y$$

なるものが定まるが，実は，前記各補題と定理とを使って，次のことが示される：

定理 7.2. $\hat{S}$ 上で $\alpha(\xi)=0$ または 1 であり，それに従って $N_{\{\xi\}}(\xi, y)=0$ または $N_{\{\xi\}}(\xi, y)=N(\xi, y)$ となる．

そこで $\hat{S}_0=\{\xi\in\hat{S};\ \alpha(\xi)=0\}$，$\hat{S}_1=\{\xi\in\hat{S},\ \alpha(\xi)=1\}$ とおくと，$\hat{S}_0$ は F_σ 集合であることが示され，また

定理 7.3. v が FSH 函数ならば，$\hat{S}_0$ の任意の閉部分集合 Γ に対して $v_\Gamma\equiv 0$ である．

よって，$\hat{S}_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$ （Γ_n は閉集合）とし，$\hat{S}$ の任意の閉部分集合 Γ に対する定理 6.2 の測度を μ とすると，定理 7.3 を使って $\mu(\Gamma_n)=0$ が示される．だから，

定理 7.4. v が FSH 函数で，Γ が $\hat{S}$ の閉部分集合ならば，v_Γ は $\int_{\Gamma\cap\hat{S}_1} N\, d\mu$ の形に表わされる．特に任意の FH_0 函数は $\int_{\hat{S}_1} N\, d\mu$ の形に表わされる．

定義 i) $\hat{S}$ 上の測度 μ で $\mu(\hat{S}_0)=0$ なるものを標準測度といい，標準測度による $\int_{\hat{S}_1} N\, d\mu$ の形の表現を標準表現という．

ii) u が FH_0 函数であって，v と $u-v$ とがともに FH_0 函数になるのは $v=cu$ （c は定数 $\geqq 0$）の場合にかぎるとき，u は極値的（extremal）であるという

次の定理は極値的 FH_0 函数を特徴づけ，同時に $\hat{S}_1$ の意味を明らかにする：

定理 7.5. i) u を極値的 FH_0 函数，Γ を $\hat{S}$ の閉部分集合とする．$u_\Gamma > 0$ であって $u - u_\Gamma$ が FH_0 函数ならば，

(7.2) $\quad u(y) = cN(\xi_0, y) \quad$ ここに $c = \int_{\partial K_0} \frac{\partial u}{\partial n} dS$

となるような点 $\xi_0 \in \Gamma \cap \hat{S}_1$ が一意的に定まる．

ii) 任意の極値的 FH_0 函数は，それによって一意的に定まる点 $\xi \in \hat{S}_1$ に対する $N(\xi, \cdot)$ の正の定数倍である．

iii) $N(\xi, y)$ は $\xi \in \hat{S}_1$ のとき，そのときにかぎり，y の極値的 FH_0 函数である．

この定理の i) の証明は，u を定理 7.4 の形に表現すると，u が極値的なことから μ の台が一点 $\xi_0 \in \Gamma \cap \hat{S}_1$ になり，定理 6.2 によって c の値の式が得られる．ξ_0 の一意性は，定理 4.2 の最後の部分からわかる．i) で $\Gamma = \hat{S}$ とおけば，定理 5.4 によって ii) を得る．iii) の証：$\xi \in \hat{S}_1$ のとき $N(\xi, \cdot) = u + v$ (u, v は FH_0 函数) とすると，定理 7.2 により $u_{\{\xi\}} + v_{\{\xi\}} = N_{\{\xi\}} = N = u + v$；従って $v = v_{\{\xi\}} = cN(\xi, \cdot)$ となる．逆は $N(\xi, \cdot)$ に ii) を適用すればよい．最後に，

定理 7.6. 任意の FH_0 函数の標準表現は一意的である．従って，任意の FH_0 函数 v と，$\hat{S}$ の任意の閉部分集合 Γ に対して，v_Γ に対する標準測度の台は Γ に含まれる．

2:

§8. 滑らかな境界を理想境界に埋め込むこと

R が可微分多様体 M の部分領域で，M における R の境界 ∂R の一部 S が滑らかな超曲面であるとし，a^{ij}，b が M における S の近傍にまで滑らかに拡張されるとする．このとき，

定理 8.1．$S \ni x \longleftrightarrow \xi_x \in \hat{S}_1$ なる一対一の対応が存在して，写像 $\Phi(x) = x\ (x \in R),\ = \xi_x\ (x \in S)$ は $R + S\ (\subset M)$ から $R + \{\xi_z;\ z \in S\}\ (\subset \hat{R})$ の上への同相写像を与える．

定理 8.2．$x \in S$ ならば，$N(x, y)$ は y の函数として，極値的 FH_0 函数である．

証明は Martin 境界の場合 [4] と同様な考え方による．

文　献（本文中で直接引用したもののみ）

[1] Z.Kuramochi: Mass distributions on the ideal boundary of abstract Riemann surfaces-II, Osaka Math. J., 8(1956),145-186.

[2] M.Ohtsuka: An elementary introduction of Kuramochi boundary, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser.A-I, 28(1964),271-299.

[3] T.Shiga-T.Watanabe: On Markov chains similar to the reflecting barrier Brownian motion, to appear in Osaka J. Math.

[4] S.Itô: Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold, J. Math. Soc. Japan, 16(1964),307-334.

[5] ——: Riemann 空間の倉持境界，数理研講究録 26（倉持境界と解析学）(1967), 46 − 74.